

第3讲二次函数与区间最值（练习）

一、定轴定区间

1. 抛物线 $y = x^2 - 5x$ ，当 $0 \leq x \leq 3$ 时，对应的 y 的取值范围是_____。

【答案】 $-\frac{25}{4} \leq y \leq 0$

【解析】 $\because$ 二次函数 $y = x^2 - 5x$ 中，对称轴为直线 $x = \frac{5}{2}$ ，

$\therefore$ 当 $x = \frac{5}{2}$ 时， y 最小，

$$y = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \times \frac{5}{2} = -\frac{25}{4},$$

当 $x = 0$ 时， y 最大，为0，

$$\therefore -\frac{25}{4} \leq y \leq 0.$$

【标注】【知识点】给定范围求二次函数最值

2. 已知函数 $y = -2x^2 - 4x + 7$ ，根据下列 x 的范围求函数的最值。

① $-3 \leq x \leq 0$ ；② $-2 \leq x \leq 2$ ；③ $0 \leq x \leq 4$ ；④ $-3 \leq x \leq -0.5$ ；⑤ $m \leq x \leq m+1$ （ m 是实数）。

【答案】① $y_{\max} = 9, y_{\min} = 1$ ；

② $y_{\max} = 9, y_{\min} = -9$ ；

③ $y_{\max} = 7, y_{\min} = -41$ ；

④ $y_{\max} = 8.5, y_{\min} = 1$ ；

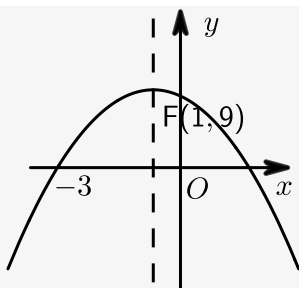
⑤A. $y_{\max} = -2(m+2)^2 + 9, y_{\min} = -2(m+1)^2 + 9$ ；

B. $y_{\max} = 9, y_{\min} = -2(m+2)^2 + 9$ ；

C. $y_{\max} = 9, y_{\min} = -2(m+1)^2 + 9$ ；

D. $y_{\max} = -2(m+1)^2 + 9, y_{\min} = -2(m+2)^2 + 9$ 。

【解析】将函数配方得 $f(x) = -2(x+1)^2 + 9$ ，①由 $-3 \leq x \leq 0$ ，如图



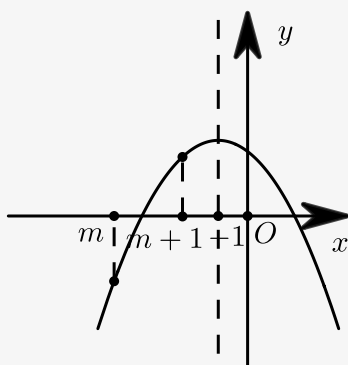
可知 $y_{\max} = f(-1) = 9$, $y_{\min} = f(-3) = 1$;

同理可求得②由 $-2 \leq x \leq 2$, 有 $y_{\max} = f(-1) = 9$, $y_{\min} = f(2) = -9$;

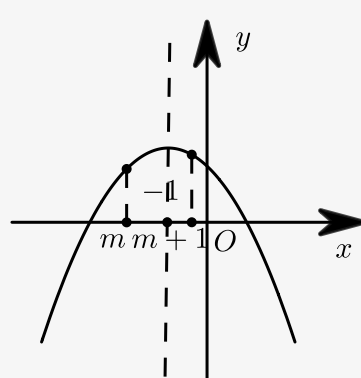
③由 $0 \leq x \leq 4$, 有 $y_{\max} = f(0) = 7$, $y_{\min} = f(4) = -41$;

④由 $-3 \leq x \leq -0.5$, 有 $y_{\max} = f(-0.5) = 8.5$, $y_{\min} = f(-3) = 1$;

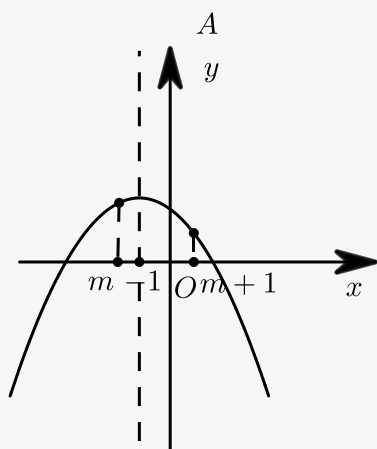
⑤当 $m \leq x \leq m+1$ (m 是实数) 时, 有如下图的四种情况:



$$m+1 < -1$$

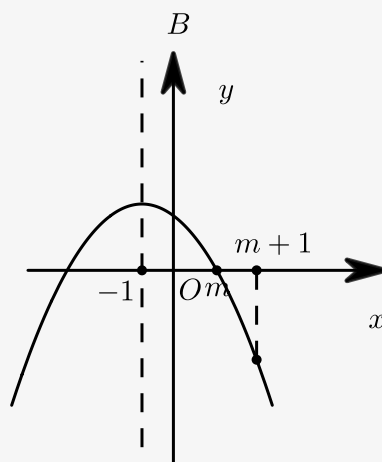


$$\begin{cases} m \leq -1 \leq m+1 \\ -1-m \geq m+1-(-1) \end{cases}$$



$$\begin{cases} m \leq -1 \leq m+1 \\ -1-m < m+1-(-1) \end{cases}$$

C



$$m > -1$$

D

由图A得 $m < -2$, 由图B得 $-2 \leq m \leq -1.5$,

由图C得 $-1.5 \leq m \leq -1$, 由图D得 $m > -1$,

所以得到:

$$A. y_{\max} = -2(m+2)^2 + 9, y_{\min} = -2(m+1)^2 + 9;$$

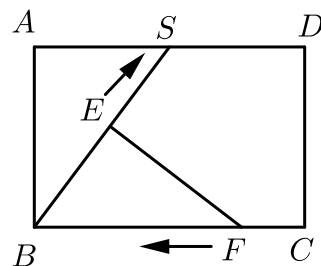
$$B. y_{\max} = 9, y_{\min} = -2(m+2)^2 + 9;$$

$$C. y_{\max} = 9, y_{\min} = -2(m+1)^2 + 9;$$

$$D. y_{\max} = -2(m+1)^2 + 9, y_{\min} = -2(m+2)^2 + 9.$$

【标注】【知识点】定轴动区间函数的最值问题

3. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $BC = 6\text{cm}$ ， $AB = 4\text{cm}$ ， S 是 AD 中点，点 E 以每秒 2cm 的速度从点 B 出发沿折线 $BS - SD - DC$ 匀速运动，同时点 F 以每秒 1cm 的速度从点 C 出发沿 CB 运动．设点 E 、 F 出发 t 秒($0 < t < 6$)时， $\triangle EBF$ 的面积为 $y\text{cm}^2$ ．



- (1) 求 y 与 t 的函数关系式．
 (2) 当 t 为何值时， y 取得最大值，并求出此最大值．

【答案】(1) 见解析

(2) 见解析

【解析】(1) 解：点 E 在 BS 上(当 $0 < t \leq 2.5$ 时)， $y = -\frac{4}{5}t^2 + \frac{24}{5}t$ ，

点 E 在 SD 上(当 $2.5 \leq t \leq 4$ 时)， $y = 12 - 2t$ ，

点 E 在 DC 上(当 $4 \leq t \leq 6$ 时)， $y = t^2 - 12t + 36$ ．

(2) 当 $0 < t \leq 2.5$ 时， $y = -\frac{4}{5}t^2 + \frac{24}{5}t$ ，对称轴为直线 $t = 3$ ， y 随 t 的增大而增大，

$\therefore t = 2.5$ 时， y 的最大值为7；

当 $2.5 \leq t \leq 4$ 时， $y = 12 - 2t$ ，是减函数，

$\therefore t = 2.5$ 时， y 有最大值为7；

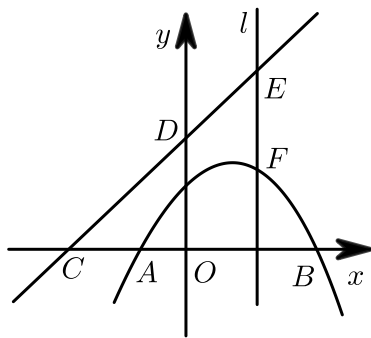
当 $4 \leq t \leq 6$ 时， $y = t^2 - 12t + 36$ ，对称轴为直线 $t = 6$ ， y 随 t 的增大而减小，

$\therefore t = 4$ 时， y 有最大值为4．

综上所述， $t = 2.5$ 时， y 有最大值为7．

【标注】【知识点】动点与特殊平行四边形问题

4. 如图, 直线 $y = kx + b$ (k, b 为常数) 分别与 x 轴, y 轴交于点 $C(-3, 0)$, $D(0, 3)$, 抛物线 $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$ 与 x 轴交于点 A 和点 B (点 A 在点 B 的左侧).



- (1) 求直线 $y = kx + b$ 的表达式.
 (2) 求点 A 和点 B 的坐标.
 (3) 若直线 l 与 x 轴垂直, 在点 A 与点 B 之间移动, 且与直线 $y = kx + b$ (k, b 为常数) 交于点 E , 与抛物线 $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$ 交于点 F , 求 EF 的最小值.

【答案】 (1) $y = x + 3$.

(2) 点 A 坐标为 $(-1, 0)$, 点 B 坐标为 $(3, 0)$.

(3) $\frac{23}{24}$.

【解析】 (1) $\because$ 直线 $y = kx + b$ 经过点 $C(-3, 0)$, $D(0, 3)$,

$$\therefore \begin{cases} -3k + b = 0 \\ b = 3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = 1 \\ b = 3 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线的表达式是 $y = x + 3$.

(2) 当 $y = 0$ 时, 即 $-\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 = 0$,

解得 $x_1 = -1$, $x_2 = 3$,

又点 A 在点 B 的左侧,

所以点 A 坐标为 $(-1, 0)$, 点 B 坐标为 $(3, 0)$.

(3) 令点 E, F 的横坐标为 a , $EF = s$, 点 F 的纵坐标为 $-\frac{2}{3}a^2 + \frac{4}{3}a + 2$,

点 E 的纵坐标为 $a + 3$,

$$\text{所以 } s = (a + 3) - \left(-\frac{2}{3}a^2 + \frac{4}{3}a + 2\right) = \frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{3}a + 1 \quad (-1 < a < 3).$$

$$\text{又 } S = \frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{3}a + 1 = \frac{2}{3}\left(a^2 - \frac{1}{2}a\right) + 1 = \frac{2}{3}\left(a - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{24},$$

由于 $\frac{2}{3} > 0$,

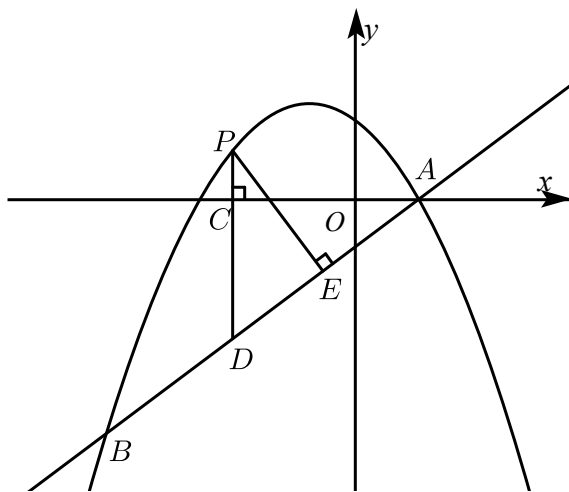
所以抛物线的开口向上, 又 $-1 < a < 3$,

所以当 $a = \frac{1}{4}$ 时, s 有最小值 $\frac{23}{24}$, 且最小值为 $\frac{23}{24}$,

即 EF 的最小值为 $\frac{23}{24}$.

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

5. 如图，在平面直角坐标系中，直线 $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$ 与抛物线 $y = -\frac{1}{4}x^2 + bx + c$ 交于 A 、 B 两点，点 A 在 x 轴上，点 B 的横坐标为 -8 。



- (1) 求该抛物线的解析式。
- (2) 点 P 是直线 AB 上方的抛物线上一动点（不与点 A 、 B 重合），过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 C ，交直线 AB 于点 D ，线段 PD 的长度是否存在最大值？若存在，求出其最大值。
- (3) 在(2)的基础上作 $PE \perp AB$ 于点 E ，设 $\triangle PDE$ 的周长为 m ，点 P 的横坐标为 x ，当 $\triangle PDE$ 周长 m 最大时，求点 P 的坐标，并求出 m 的最大值。

【答案】(1) $y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ 。

(2) $\frac{25}{4}$ 。

(3) 存在， $P\left(-3, \frac{5}{2}\right)$ ， m 的最大值为15。

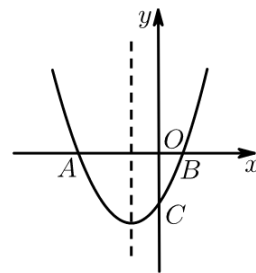
【解析】(1) 略。

(2) 略。

(3) 略。

【标注】【知识点】二次函数与直角三角形结合；定直线（线段）与动抛物线交点问题

6. 如图，抛物线 $y = (x + 1)^2 + k$ 与 x 轴相交于 A 、 B 两点，与 y 轴相交于点 $C(0, -3)$ 。



- (1) 求抛物线的对称轴及 k 值 .
- (2) 抛物线的对称轴上存在一点 P , 使得 $PB + PC$ 的值最小 , 求此时点 P 的坐标 .
- (3) 点 M 是抛物线上一动点 , 且在第三象限 , 当 M 点运动到何处时 , 四边形 $AMCB$ 的面积最大 ? 求出四边形 $AMCB$ 的最大面积及此时点 M 的坐标 .

【答案】 (1) $x = -1$, $k = -4$.

(2) $(-1, -2)$.

(3) $\frac{75}{8}$, $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{15}{4}\right)$.

【解析】 (1) 抛物线的对称轴为直线 $x = -1$,

把 $C(0, -3)$ 代入 $y = (x + 1)^2 + k$ 得 $-3 = 1 + k$,

$\therefore k = -4$.

故答案为 : -1 ; -4 .

(2) 连接 AC , 交对称轴于点 P , 如图 ,

对于 $y = (x + 1)^2 - 4$, 令 $y = 0$, 则 $(x + 1)^2 - 4 = 0$, 解得 $x_1 = 1$, $x_2 = -3$

,

$\therefore A$ 点坐标为 $(-3, 0)$, B 点坐标为 $(1, 0)$,

设直线 AC 的关系式为 : $y = mx + b$,

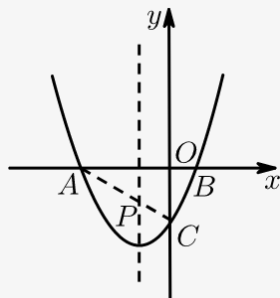
把 $A(-3, 0)$, $C(0, -3)$ 代入 $y = mx + b$ 得 $\begin{cases} -3m + b = 0 \\ b = -3 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} m = -1 \\ b = -3 \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 AC 的关系式为 $y = -x - 3$,

当 $x = -1$ 时 , $y = 1 - 3 = -2$,

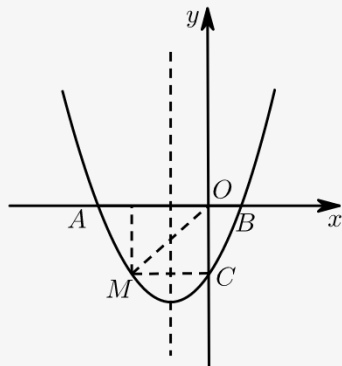
$\therefore P$ 点坐标为 $(-1, -2)$.

故答案为 : $(-1, -2)$.



(3) 连接 OM , 如图 , 设 M 点坐标为 $(x, (x+1)^2 - 4)$

$$\begin{aligned}
 S_{AMCB} &= S_{\triangle AMO} + S_{\triangle CMO} + S_{\triangle CBO} \\
 &= \frac{1}{2} \times AO \times |y_m| + \frac{1}{2} \times CO \times |x_m| + \frac{1}{2} \times OC \times BO, \\
 &= \frac{3}{2} [4 - (x+1)^2] + \frac{1}{2} \times 3 \times (-x) + \frac{1}{2} \times 3 \times 1, \\
 &= -\frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + 6, \\
 &= -\frac{3}{2} \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{75}{8}, \\
 \text{当 } x &= -\frac{3}{2} \text{ 时, } S \text{ 最大, 最大值为 } \frac{75}{8}, \\
 \text{此时 } M \text{ 点坐标为 } &\left(-\frac{3}{2}, -\frac{15}{4}\right).
 \end{aligned}$$



【标注】【知识点】二次函数与面积

二、定轴动区间

7. 若函数 $y = x^2 - 2x + 1$ 在 $a \leq x \leq a + 2$ 时的最小值为 4 , 则 a 的值是多少 ?

【答案】 $\{-3, 3\}$.

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, 对称轴 $x = 1$,

$\therefore$ 区间 $[a, a + 2]$ 上的最小值为 3 ,

$\therefore$ 当 $1 \leq a$ 时 , $y_{\min} = f(a) = (a - 1)^2 = 4$, $a = -1$ (舍去) 或 $a = 3$,

当 $a + 2 \leq 1$ 时, 即 $a \leq -1$, $y_{\min} = f(a + 2) = (a + 1)^2 = 4$, $a = 1$ (舍去) 或 $a = -3$,
 当 $a < a < a + 2$ 时, $y_{\min} = f(1) = 0 \neq 4$.
 故 a 的取值集合为 $\{-3, 3\}$.

【标注】【思想】函数思想

【能力】抽象概括能力

8. 二次函数 $y = x^2 - 2x - 3$, 当 $m - 2 \leq x \leq m$ 时, 函数有最大值 5, 则 m 的值可能为 _____.

【答案】 0或4

【解析】 $\because$ 二次函数 $y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$,

$\therefore$ 该函数图象的对称轴是直线 $x = 1$,

$\therefore$ 当 $m - 2 \leq x \leq m$ 时, 函数有最大值 5,

$\therefore$ 当 $m = 2$ 时, $m - 2$ 和 m 到对称轴的距离相等, 即当 $m = 2$ 时取得最大值,

此时 $y = (2 - 1)^2 - 4 = -3 \neq 5$.

当 $m > 2$ 时, 在 $x = m$ 处取得最大值, 即 $m^2 - 2m - 3 = 5$,

解得 $m = 4$ 或 $m = -2$ (舍去).

当 $m < 2$ 时, 在 $x = m - 2$ 处取得最大值, 即 $(m - 2)^2 - 2(m - 2) - 3 = 5$,

解得 $m = 0$ 或 $m = 6$ (舍去).

综上, m 的值可能是 0 或 4,

故答案为: 0 或 4.

【标注】【知识点】给定范围求二次函数最值

9. 若函数 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{2}$, 其中 $a \leq x \leq b$ ($a < b$), y 的最小值为 $2a$, y 的最大值为 $2b$, 求 a 、 b 的值.

【答案】 $a = 1, b = 3$ 或 $a = -2 - \sqrt{17}, b = \frac{13}{4}$.

【解析】 当 $a < 0, b > 0$ 时,

$$y_{\max} = \frac{13}{2} = 2b \Rightarrow b = \frac{13}{4},$$

$$y\left(\frac{13}{4}\right) = -\frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{169}{16} + \frac{13}{2} = \frac{39}{32} > 0,$$

$$\therefore y_{\min} = -\frac{1}{2} \cdot a^2 + \frac{13}{2} = 2a \Rightarrow a = -2 - \sqrt{17},$$

当 $b \leq 0$ 时,

$$y_{\max} = -\frac{1}{2}b^2 + \frac{13}{2} = 2b \Rightarrow b = -2 \pm \sqrt{17} \text{ (舍)},$$

当 $b > a \geq 0$ 时,

$$y_{\max} = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{13}{2} = 2b,$$

$$y_{\min} = -\frac{1}{2}b^2 + \frac{13}{2} = 2a,$$

$$\therefore a = 1, b = 3,$$

$$\text{故 } a = 1, b = 3 \text{ 或 } a = -2 - \sqrt{17}, b = \frac{13}{4}.$$

【标注】【能力】运算能力

【知识点】一元二次方程根与系数的关系

【思想】分类讨论思想

10. 已知二次函数 $y = a(x-1)^2 - 4$ 的图象经过点 $(3, 0)$.

(1) 求 a 的值.

(2) 若 $A(m, y_1)$ 、 $B(m+n, y_2)$ ($n > 0$) 是该函数图象上的两点, 当 $y_1 = y_2$ 时, 求 m 、 n 的数量关系.

(3) 当 $m \leq x \leq m+n$ 时, 请写出函数最小值 $y_{\min}$.

【答案】(1) 1.

(2) $2m + n - 2 = 0$.

(3) ①当 $m+n < 1$ 时, $y_{\min} = m^2 + n^2 + 2mn - 2m - 2n - 3$;

②当 $m \leq 1 \leq m+n$ 时, $y_{\min} = -4$;

③当 $m > 1$ 时, $y_{\min} = m^2 - 2m - 3$.

【解析】(1) 由于 $y = a(x-1)^2 - 4$ 的图象经过点 $(3, 0)$

则 $0 = a(3-1)^2 - 4$, 解得 $a = 1$.

(2) 由题意得二次函数 $y = x^2 - 2x - 3$,

由 $A(m, y_1)$ 、 $B(m+n, y_2)$ ($n > 0$) 是该函数图象上的两点,

$$\text{得} \begin{cases} y_1 = m^2 - 2m + 3 \\ y_2 = (m+n)^2 - 2(m+n) + 3 \end{cases}$$

当 $y_1 = y_2$ 时, $(m+n)^2 - 2(m+n) = m^2 - 2m$,

$(2m+n) \cdot n - 2n = 0$, 由于 $n > 0$,

因此 $2m + n - 2 = 0$.

(3) ①当 $m+n < 1$ 时, $y_{\min} = m^2 + n^2 + 2mn - 2m - 2n - 3$.

②当 $m \leq 1 \leq m+n$ 时, $y_{\min} = -4$;

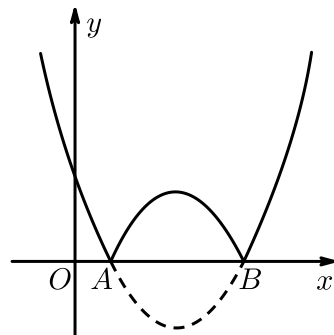
③当 $m > 1$ 时, $y_{\min} = m^2 - 2m - 3$.

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】二次函数与坐标轴交点

【知识点】点在二次函数图象上

11. 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 - mx + \frac{1}{2}m^2 - 2$ (m 为大于0的常数)与 x 轴交于 A, B 两点(点 A 在点 B 的左侧).



(1) 若点 A 的坐标为 $(1, 0)$.

① 求抛物线的表达式.

② 当 $n \leq x \leq 2$ 时, 函数值 y 的取值范围是 $-\frac{3}{2} \leq y \leq 5 - n$, 求 n 的值.

(2) 将抛物线在 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折, 得到新的函数的图象, 如图, 当 $2 < x < 3$ 时, 若此函数的值随 x 的增大而减小, 直接写出 m 的取值范围.

【答案】(1) ① $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$.

② -1 .

(2) $1 \leq m \leq 2$ 或 $m \geq 5$.

【解析】(1) ① 将点 $A(1, 0)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x^2 - mx + \frac{1}{2}m^2 - 2$,

$$\text{得: } 0 = \frac{1}{2} - m + \frac{1}{2}m^2 - 2,$$

$$\text{解得: } m_1 = 3, m_2 = -1 (\text{舍去}),$$

$$\therefore \text{抛物线的表达式为 } y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}.$$

$$\text{② } \therefore \text{抛物线的表达式为 } y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2},$$

$$\therefore \text{抛物线开口向上, 对称轴为直线 } x = -\frac{-3}{2 \times \frac{1}{2}} = 3,$$

$\therefore$ 当 $n \leq x \leq 2$ 时, y 随 x 的增大而减小.

$$\therefore \text{当 } n \leq x \leq 2 \text{ 时, 函数值 } y \text{ 的取值范围是 } -\frac{3}{2} \leq y \leq 5 - n,$$

$$\therefore \frac{1}{2}n^2 - 3n + \frac{5}{2} = 5 - n,$$

$$\text{即 } n^2 - 4n - 5 = 0,$$

$$\text{解得: } n_1 = 5 \text{ (不合题意, 舍去)}, n_2 = -1,$$

$$\therefore n \text{ 的值为 } -1.$$

$$(2) \text{ 当 } y = 0 \text{ 时, } \frac{1}{2}x^2 - mx + \frac{1}{2}m^2 - 2 = 0,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}[x - (m + 2)][x - (m - 2)] = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = m - 2, x_2 = m + 2,$$

$$\therefore \text{点 } A \text{ 的坐标为 } (m - 2, 0), \text{ 点 } B \text{ 的坐标为 } (m + 2, 0).$$

$$\therefore \text{抛物线的表达式为 } y = \frac{1}{2}x^2 - mx + \frac{1}{2}m^2 - 2,$$

$$\therefore \text{对称轴为直线 } x = -\frac{-m}{2 \times \frac{1}{2}} = m.$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } m > 3 \text{ 时, 有 } m - 2 \geq 3,$$

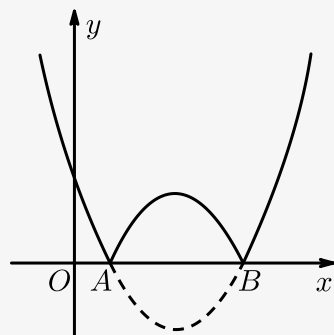
$$\text{解得: } m \geq 5;$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } m \leq 2 \text{ 时, 有 } m + 2 \geq 3,$$

$$\text{解得: } m \geq 1,$$

$$\therefore 1 \leq m \leq 2.$$

综上所述: m 的取值范围为 $1 \leq m \leq 2$ 或 $m \geq 5$.



【标注】【能力】运算能力

【知识点】二次函数一般式

三、动轴定区间

12. 已知二次函数 $y = -(x - h)^2$ (h 为常数), 当自变量 x 的值满足 $2 \leq x \leq 5$ 时, 与其对应的函数值 y 的最大值为 -1 , 则 h 的值为 ().

A. 3或6

B. 1或6

C. 1或3

D. 4或6

【答案】B

【解析】二次函数 $y = -(x - h)^2$ (h 为常数)的图象开口向下，
顶点为 $(h, 0)$ ，函数最大值为0。

因为当 $2 \leq x \leq 5$ 时，与其对应的函数值 y 的最大值为 -1 ，
故 h 不能取 $2 \sim 5$ (含2与5)间的数。

当 $h < 2$ 时，函数在 $x = 2$ 处取得最大值，即 $-(2 - h)^2 = -1$ ，
解得 $h = 1$ 或 $h = 3$ (不合题意，舍去)；

当 $h > 5$ 时，函数在 $x = 5$ 处取得最大值，即 $-(5 - h)^2 = -1$ ，
解得 $h = 6$ 或 $h = 4$ (不合题意，舍去)。

综上所述， h 的值为1或6。

故选B。

【标注】【知识点】定区间动轴函数的最值问题

13. 当 $-1 \leq x \leq 2$ 时，二次函数 $y = x^2 - 2mx + 2m^2 + 1$ 有最小值4，求实数 m 的值。

【答案】 $m = \sqrt{3}$ 或 $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ 。

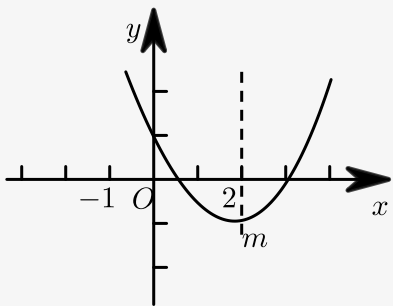
【解析】由题可知， $y = (x - m)^2 + m^2 + 1$ ，

当 $m \geq 2$ 时， $x = 2$ 时，有最小值，

即 $(2 - m)^2 + m^2 + 1 = 4$ ，

$\therefore 2m^2 - 4m + 1 = 0$ ，

$\therefore m = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} < 2$ ，不符合。

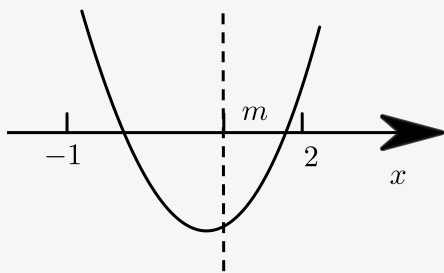


当 $-1 < m < 2$ 时， $x = m$ 时有最小值，

即 $m^2 + 1 = 4$ ，

$\therefore m = \pm\sqrt{3}$ ，

则 $m = \sqrt{3}$ ，符合。



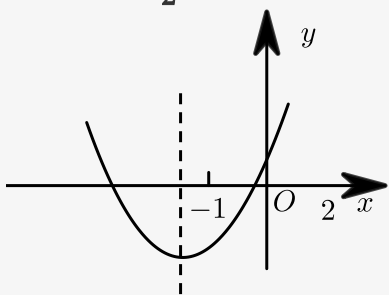
当 $m \leq -1$ 时, $x = -1$ 时有最小值,

$$\text{即 } (-1 - m)^2 + m^2 + 1 = 4,$$

$$\therefore m^2 + m - 1 = 0,$$

$$\therefore m = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$\text{则 } m = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \text{ 符合.}$$



$$\text{综上: } m = \sqrt{3} \text{ 或 } \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

【标注】【知识点】给定范围求二次函数最值

14. 已知函数 $y = ax^2 + (2a - 1)x - 3$ ($a \neq 0$), 当 $-\frac{3}{2} \leq x \leq 2$ 时, y 的最大值为 1, 求实数 a 的值.

【答案】 a 值为 $\frac{3}{4}$ 或 $-\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}$.

【解析】 因为是求闭区间上的最值, 则最大值可能产生在抛物线的端点或顶点上.

函数 $f(x)$ 的最大值只能在 $x_1 = -\frac{3}{2}$ 或 $x_2 = 2$ 或 $x_0 = \frac{1 - 2a}{2a}$ 处取得.

$$\text{① 令 } f\left(-\frac{3}{2}\right) = 1, \text{ 解得 } a = -\frac{10}{3}. \text{ 此时 } x_0 = \frac{1 - 2a}{2a} = \frac{23}{20} \in \left[-\frac{3}{2}, 2\right],$$

故 $f(x)$ 的最大值不可能在 $x_1 = -\frac{3}{2}$ 处取得.

$$\text{② 令 } f(2) = 1, \text{ 解得 } a = \frac{3}{4}. \text{ 此时 } x_0 = \frac{1 - 2a}{2a} = -\frac{1}{3} < -\frac{\frac{3}{2} + 2}{2}, \text{ 故当 } a = \frac{3}{4} \text{ 时取得最大值 } 1.$$

$$\text{③ 令 } f\left(\frac{1 - 2a}{2a}\right) = 1, \text{ 解得 } a = \frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{2}, \text{ 要使 } f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处取得最大值,}$$

$$\text{必须且只需 } a < 0 \text{ 且 } x_0 \in \left[-\frac{3}{2}, 2\right], \text{ 经检验, 只有 } a = -\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}.$$

综上所述, 所求的 a 值为 $a = \frac{3}{4}$ 或 $a = -\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$.

二次函数的区间最值问题 $f(x) = a(x-h)^2 + k (a > 0), x \in [p, q]$, 既是重点又是难点,

一般有三种情况:

(1)对称轴、区间都是给定的;(2)对称轴动, 区间固定;(3)对称轴定, 区间变动.

对这类问题的求解, 一般结合配方法, 根据函数的单调性、图象及分类讨论完成.

对于(2)、(3)两类, 通常要分对称轴在区间上(内)、对称轴在区间外两大类情况进行讨论. 若 $x = h \in [p, q]$, 则 $x = h$ 时, 有最小值 k , 最大值是 $f(p)$ 与 $f(q)$ 中较大者; 若 $h \notin [p, q]$, 则 $f(p)$ 与 $f(q)$ 中较小者为最小值, 较大者为最大值, 即最值在区间的端点取得.

对于 $f(x) \geq 0$ 在区间 $[p, q]$ 上恒成立问题, 通常转化为 $f(x)$ 在 $[p, q]$ 上的最值问题, 结合解不等式(组)去解决.

【标注】【题型】题型: 二次函数最值

15. 已知抛物线 $y = -x^2 + bx + 2 - b$, 在自变量 x 的值满足 $-1 \leq x \leq 2$ 的情况下, 函数有最大值 m , 则 m 的最小值是 _____.

【答案】 1

【解析】 $y = -x^2 + bx + 2 - b = -\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{4} - b + 2$
 $= -\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(b-2)^2 + 1,$
① $-1 \leq \frac{b}{2} \leq 2$ 时,
即 $-2 \leq b \leq 4$,
此时, $x = \frac{b}{2}, y_{\max} = \frac{1}{4}(b-2)^2 + 1 \geq 1, m_{\min} = 1.$
② $\frac{b}{2} \leq -1$ 时, $b \leq -2, x = -1$ 时,
 $m = -1 - b + 2 - b = -2b + 1, b = -2, m_{\min} = 5.$
③ $b \geq -2$ 时, $b \geq 4, x = 2$ 时,
 $m = -4 + 2b + 2 - b = b - 2, b = 4, m_{\min} = 2.$
 $\therefore m$ 的最小值为1.

【标注】【知识点】定区间动轴函数的最值问题

16.

已知函数 $y = x^2 + bx + 3b$ (b 为常数) 的图象不经过第三象限, 当 $-6 \leq x \leq 2$ 时, 函数的最大值与最小值之差为 25, 求 b 的值是 _____.

【答案】 2或6

【解析】 函数 $y = x^2 + bx + 3b = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + 3b - \frac{b^2}{4}$ 图象不经第三象限,
 当对称轴 $x = -\frac{b}{2}$ 在 x 轴正半轴上时,
 $x = -\frac{b}{2} > 0$, 即 $b < 0$,
 要使 $y = x^2 + bx + 3b$ 不经过第三象限,
 则 $3b \geq 0$, 即 $b \geq 0$, 相互矛盾,
 $\therefore$ 这种情况不存在, 即 $x = -\frac{b}{2}$ 在 x 轴负半轴, 要使 $y = x^2 + bx + 3b$ 不经过第三象限,
 $\therefore y = x^2 + bx + 3b$ 与 x 轴只有一个交点或没有交点,
 $\therefore y = 0$ 时, $x^2 + bx + 3b = 0$ 关于 x 方程有两个相等实数根或没有根,
 即 $\Delta = b^2 - 4 \times 1 \times 3b = b^2 - 12b \leq 0$,
 $\therefore 0 \leq b \leq 12$,
 当 $-\frac{b}{2} \leq -6$ 时, 即 $b \geq 12$,
 $\therefore b = 12$, $y = x^2 + 12x + 36$,
 若 $-6 \leq x \leq 2$ 时, 函数最大值为 $2^2 + 12 \times 2 + 36 = 64$,
 函数最小值为 $(-6)^2 + 12 \times (-6) + 36 = 0$,
 最大值与最小值之差为 $64 - 0 = 64 \neq 25$, 不符合题意,
 当 $-6 < -\frac{b}{2} < -2$, 即 $4 < b < 12$.
 若 $-6 \leq x \leq 2$ 时, 对称轴 $x = -\frac{b}{2}$ 更靠近 $x = -6$,
 $\therefore$ 当 $x = 2$ 时, 函数取最大值为 $4 + 2b + 3b = 5b + 4$,
 当 $x = -\frac{b}{2}$ 时, 函数取最小值为 $3b - \frac{b^2}{4}$,
 $\therefore (5b + 4)\left(3b - \frac{b^2}{4}\right) = 25$,
 $\therefore \frac{b^2}{4} + 2b - 21 = 0$, $b^2 + 8b - 84 = 0$,
 $\therefore (b + 14)(b - 6) = 0$,
 $\therefore b = -14$ 或 $b = 6$,
 又 $4 < b < 12$,
 $\therefore b = 6$,
 当 $-2 \leq -\frac{b}{2} \leq 0$ 时, $0 \leq b \leq 4$,
 若 $-6 \leq x \leq 2$ 时, 对称轴 $x = -\frac{b}{2}$ 更靠近 $x = 2$,

∴当 $x = -6$ 时, 函数取最大值为 $36 - 6b + 3b = 36 - 3b$,

当 $x = -\frac{b}{2}$ 时, 函数取最小值为 $3b - \frac{b^2}{4}$,

$$\therefore (36 - 3b) \left(3b - \frac{b^2}{4} \right) = 25,$$

$$\therefore \frac{b^2}{4} - 3b - 3b + 36 = 25, b^2 - 24b + 44 = 0,$$

$$\therefore (b - 2)(b - 22) = 0,$$

$$\therefore b = 2 \text{ 或 } b = 22,$$

$$\text{又 } 0 \leq b \leq 4,$$

$$\therefore b = 2.$$

综上所述: $b = 2$ 或 $b = 6$.

【标注】【思想】分类讨论思想

【能力】推理论证能力

【知识点】二次函数顶点式

四、动轴动区间

17. 对于题目“二次函数 $y = \frac{3}{4}(x - m)^2 + m$, 当 $2m - 3 \leq x \leq 2m$ 时, y 的最小值是1, 求 m 的值.” 甲的结果是 $m = 1$, 乙的结果是 $m = -2$, 则().

A. 甲的结果正确

B. 乙的结果正确

C. 甲、乙的结果合在一起不正确

D. 甲、乙的结果合在一起才正确

【答案】D

【解析】当 $2m - 3 \geq m$, 即 $m \geq 3$ 时, $\frac{3}{4}(2m - 3 - m)^2 + m = 1$,

$$\therefore 3m^2 - 14m + 23 = 0, \text{ 无解.}$$

当 $2m - 3 \leq m \leq 2m$, 即 $0 \leq m \leq 3$ 时, $m = 1$,

当 $2m \leq m$, 即 $m \leq 0$ 时, $\frac{3}{4}(2m - m)^2 + m = 1$,

$$\therefore m = -2,$$

综上所述: $m = 1$ 或 $m = -2$.

【标注】【题型】二次函数给定范围求最值

18. 已知二次函数 $y = x^2 + mx + n$ (m, n 为常数).

- (1) 若 $m = -2$, $n = -4$, 求二次函数的最小值.
- (2) 若 $n = 3$, 该二次函数的图象与直线 $y = 1$ 只有一个公共点, 求 m 的值.
- (3) 若 $n = m^2$, 且 $3m + 4 < 0$, 当 x 满足 $m \leq x \leq m + 2$ 时, y 有最小值 13, 求此二次函数的解析式.

【答案】 (1) -5 .

(2) $\pm 2\sqrt{2}$.

(3) $y = x^2 - 3x + 9$.

【解析】 (1) 当 $m = -2$, $n = -4$ 时, $y = x^2 - 2x - 4 = (x - 1)^2 - 5$

$\therefore$ 当 $x = 1$ 时, y 最小值 $= -5$.

(2) 当 $n = 3$ 时, $y = x^2 + mx + 3$, 令 $y = 1$, 则 $x^2 + mx + 3 = 1$, 由题意知,

$x^2 + mx + 3 = 1$ 有两个相等的实数根, 则 $\Delta = m^2 - 8 = 0$,

$\therefore m = \pm 2\sqrt{2}$.

(3) 由 $3m + 4 < 0$, 可知 $m < -\frac{4}{3}$,

$\therefore m \leq x \leq m + 2 < \frac{2}{3}$, 抛物线 $y = x^2 + mx + m^2$ 的对称轴为 $x = -\frac{m}{2}$,

$\therefore m < -\frac{4}{3}$

$\therefore -\frac{m}{2} > \frac{2}{3}$,

$\therefore$ 对称轴为 $x = -\frac{m}{2} > \frac{2}{3}$,

$\therefore$ 在 $m \leq x \leq m + 2$ 时, y 随 x 的增大而减小,

$\therefore$ 当 $x = m + 2$, y 有最小值为 13,

$\therefore (m + 2)^2 + m(m + 2) + m^2 = 13$, 即 $m^2 + 2m - 3 = 0$, 解得 $m = 1$ 或

$m = -3$, 而 $m < -\frac{4}{3}$,

$\therefore m = -3$, 此时, $y = x^2 - 3x + 9$.

【标注】 【知识点】二次函数一般式

【知识点】二次函数与坐标轴交点

【能力】运算能力

19. 已知二次函数 $y = x^2 + 2bx + c$ (b, c 为常数).

(1) 当 $b = 1$, $c = -3$ 时, 求二次函数在 $-2 \leq x \leq 2$ 上的最小值.

(2) 当 $c = 3$ 时, 求二次函数在 $0 \leq x \leq 4$ 上的最小值.

(3) 当 $c = 4b^2$ 时, 若在自变量 x 的值满足 $2b \leq x \leq 2b + 3$ 的情况下, 与其对应的函数值 y 的最小值为 21, 求此时二次函数的解析式.

【答案】(1) -4

(2) 若 $-b < 0$, y 有最小值 3,

若 $0 \leq -b \leq 4$, y 有最小值 $-b^2 + 3$,

若 $-b > 4$, y 有最小值 $19 + 8b$.

(3) $y = x^2 + \sqrt{7}x + 7$ 或 $y = x^2 - 4x + 16$

【解析】(1) 当 $b = 1$, $c = -3$ 时, 二次函数的解析式为 $y = x^2 + 2x - 3$, 即

$$y = (x - 1)^2 - 4.$$

$\therefore x = -1$ 在 $-2 \leq x \leq 2$ 的范围内, 此时二次函数取得最小值 -4.

(2) $y = x^2 + 2bx + 3$ 的对称轴是 $x = -b$,

① 若 $-b < 0$, 即 $b > 0$ 时, 当 $x = 0$ 时, y 有最小值 3,

② 若 $0 \leq -b \leq 4$, 即 $-4 \leq b \leq 0$ 时, 当 $x = -b$ 时, y 有最小值 $-b^2 + 3$,

③ 若 $-b > 4$, 即 $b < -4$ 时, 当 $x = 4$ 时, y 有最小值 $19 + 8b$.

(3) 当 $c = 4b^2$ 时, 二次函数的解析式为 $y = x^2 + 2bx + 4b^2$.

它的图像开口向上, 对称轴为 $x = -b$ 的抛物线,

① 若 $-b < 2b$, 即 $b > 0$,

在自变量 x 的值满足 $2b \leq x \leq 2b + 3$ 的情况下, 与其对应的函数值 y 随 x 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $x = 2b$ 时, $y = (2b)^2 + 2b \cdot 2b + (2b)^2 = 12b^2$ 为最小值.

$$\therefore 12b^2 = 21, \text{ 解得 } b_1 = -\frac{\sqrt{7}}{2} \text{ (舍)}, b_2 = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

② 若 $2b \leq -b \leq 2b + 3$, 即 $-1 \leq b \leq 0$,

当 $x = -b$ 时, 代入得 $y = 3b^2$ 为最小值.

$$\therefore 3b^2 = 21, \text{ 解得 } b_1 = -\sqrt{7} \text{ (舍)}, b_2 = \sqrt{7} \text{ (舍)}.$$

③ 若 $-b > 2b + 3$, 即 $b < -1$,

在自变量 x 的值满足 $2b \leq x \leq 2b + 3$ 的情况下, 与其对应的函数值 y 随 x 的增大而减小,

$\therefore$ 当 $x = 2b + 3$ 时, 代入得 $y = 12b^2 + 18b + 9$ 为最小值.

$$\therefore 12b^2 + 18b + 9 = 21, \text{ 解得 } b_1 = \frac{1}{2} \text{ (舍)}, b_2 = -2.$$

综上所述, $b = \frac{\sqrt{7}}{2}$ 或 $b = -2$.

$\therefore$ 此时二次函数的解析式为 $y = x^2 + \sqrt{7}x + 7$ 或 $y = x^2 - 4x + 16$.

【标注】【知识点】二次函数一般式

【思想】分类讨论思想

20. 定义：将函数 l 的图象绕点 $P(m, 0)$ 旋转 180° ，得到新的函数 l' 的图象，我们称函数 l' 是函数 l 关于点 P 的相关函数．

例如：当 $m = 1$ 时，函数 $y = (x + 1)^2 + 5$ 关于点 $P(1, 0)$ 的相关函数为 $y = -(x - 3)^2 - 5$ ．

(1) 当 $m = 0$ ．

① 一次函数 $y = x - 1$ 关于点 P 的相关函数为 _____ ．

② 点 $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{8}\right)$ 在二次函数 $y = -ax^2 - ax + 1 (a \neq 0)$ 关于点 P 的相关函数的图象上，求 a 的值．

(2) 函数 $y = (x - 1)^2 + 2$ 关于点 P 的相关函数是 $y = -(x + 3)^2 - 2$ ，则 $m =$ _____ ．

(3) 当 $m - 1 \leq x \leq m + 2$ 时，函数 $y = x^2 - mx - \frac{1}{2}m^2$ 关于点 $P(m, 0)$ 的相关函数的最大值为6，求 m 的值．

【答案】 (1) ① $y = x + 1$

② $a = \frac{1}{2}$ ．

(2) -1

(3) $1 - \sqrt{15}$ 或 $2\sqrt{2}$ ．

【解析】 (1) ① 当 $m = 0$ 时， $P(0, 0)$ ，

将一次函数 $y = x - 1$ 绕 $P(0, 0)$ 旋转 180° ，

得到新的函数与 $y = x - 1$ 平行，

且在 y 轴的距离与 $y = x - 1$ 在 y 轴截距刚好互为相反数，

$\therefore$ 新函数解析式为 $y = x + 1$ ，

$\therefore$ 一次函数 $y = x - 1$ 关于点 P 的相关函数为 $y = x + 1$ ．

② $\because y = -ax^2 - ax + 1 = -a\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 + \frac{1}{4}a$ ，

$\therefore y = -ax^2 - ax + 1$ 关于点 $P(0, 0)$ 的相关函数为

$$y = a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 - \frac{1}{4}a，$$

$\because$ 点 $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{8}\right)$ 在函数 $y = a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 - \frac{1}{4}a$ 的图象上，

$$\therefore -\frac{9}{8} = a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 - \frac{1}{4}a，$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{2} ．$$

(2) 函数 $y = (x - 1)^2 + 2$ ，顶点为 $(1, 2)$ ，

函数 $y = -(x + 3)^2 - 2$ ，顶点为 $(-3, -2)$ ，

点 $(1, 2)$ 关于点 $P(m, 0)$ 的对称点为点 $(-3, -2)$ ，

$$\therefore m = \frac{1+(-3)}{2} = -1.$$

$$(3) \therefore y = x^2 - mx - \frac{1}{2}m^2 = \left(x - \frac{1}{2}m\right)^2 - \frac{3}{4}m^2,$$

$$\therefore y = x^2 - mx - \frac{1}{2}m^2 \text{ 关于点 } P(m, 0) \text{ 的相关函数 } y = -\left(x - \frac{3}{2}m\right)^2 + \frac{3}{4}m^2$$

①当 $\frac{3}{2}m \leq m - 1$, 即 $m \leq -2$ 时, 当 $x = m - 1$ 时, y 有最大值是 6,

$$\therefore -\left(m - 1 - \frac{3}{2}m\right)^2 + \frac{3}{4}m^2 = 6,$$

$$\therefore m_1 = 1 - \sqrt{15}, m_2 = 1 + \sqrt{15} \text{ (不符合题意, 舍去)}.$$

②当 $m - 1 < \frac{3}{2}m \leq m + 2$, 即 $-2 < m \leq 4$ 时, 当 $x = \frac{3}{2}m$ 时, y 有最大值是 6

$$\therefore \frac{3}{4}m^2 = 6,$$

$$\therefore m_1 = 2\sqrt{2}, m_2 = -2\sqrt{2} \text{ (不符合题意, 舍去)}.$$

③当 $\frac{3}{2}m > m + 2$, 即 $m > 4$ 时, 当 $x = m + 2$ 时, y 有最大值是 6,

$$\therefore -\left(m + 2 - \frac{3}{2}m\right)^2 + \frac{3}{4}m^2 = 6,$$

$$\therefore m = -2 \pm 2\sqrt{6} \text{ (不符合题意, 舍去)}.$$

综上, m 的值是 $1 - \sqrt{15}$ 或 $2\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】与函数有关的新定义